Aula 18

Teorema de Picard-Lindelöf

Existência e Unicidade de Soluções de Problemas de Valor Inicial para EDOs

Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$. Chamam-se **iterações de Picard** do problema de valor inicial para a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

à sucessão de funções definida recursivamente a partir de $\mathbf{y_0}(t) = \mathbf{y}_0$ e, para $k \geq 1$, por

$$\frac{d\mathbf{y_k}}{dt}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y_{k-1}}(t)), \qquad \mathbf{y_k}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

ou, equivalentemente

$$\mathbf{y_k}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{y_{k-1}}(s))ds.$$

Proposição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$. Então existe solução de classe $C^1(I)$ do problema de valor inicial, nalgum intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com $t_0 \in I$, para a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

se e só se existe uma solução contínua $C(I)$ da equação integral

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds.$$

Definição: Dado um conjunto não vazio qualquer $X \neq \emptyset$ e uma função $d : X \times X \to [0, +\infty[$, diz-se que (X, d) é um **espaço métrico** se a função d satisfaz, para quaisquer $x, y, z \in X$,

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Chama-se **distância ou métrica** a uma tal função.

Definição: Dada uma sucessão $\{x_n\}$ de elementos num espaço métrico (X, d), diz-se que é uma **sucessão de Cauchy** se satisfaz

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Diz-se que um espaço métrico é **completo** se toda a sucessão de Cauchy é convergente.

Proposição: O conjunto $C(I)$ das funções contínuas $\mathbf{y} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de um intervalo fechado e limitado $I = [a, b]$ para $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico completo, com a distância

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \max_{t\in I} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\|.$$

A convergência de sucessões de funções neste espaço métrico é equivalente à convergência uniforme.

Definição: Dado um espaço métrico (X, d), em que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é a função distância, ou métrica, e uma aplicação $T : X \to X$, diz-se que T é uma **contração** se existe $0 \leq K < 1$ tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq K d(x, y).$$

Diz-se que $x \in X$ é um **ponto fixo** de T se $Tx = x$.

Teorema do Ponto Fixo (Banach): Seja (X, d) um espaço métrico completo e $T : X \to X$ uma contração. Então, T tem um ponto fixo em X e ele é único. Esse ponto fixo pode ser obtido pelo limite da sucessão recursiva

$$\lim_n x_n = \lim_n T^n(x_0) = \lim_n \underbrace{T(T(T(\cdots T}_{n}(x_0)))$$

para qualquer ponto inicial $x_0 \in X$.

Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Diz-se que $\mathbf{f}$ é **Lipschitz**, ou **lipschitziana**, **relativamente à variável** $\mathbf{y}$ se existe $L > 0$ tal que

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{y}})\| \leq L \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|,$$

para todos $(t, \mathbf{y}), (t, \tilde{\mathbf{y}}) \in \Omega$.
Diz-se que $\mathbf{f}$ é **localmente Lipschitz**, ou **localmente lipschitziana**, **relativamente à variável** $\mathbf{y}$ se for lipschitizana em cada subconjunto compacto de Ω.

Proposição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Então, se $\mathbf{f}$ é de classe C^1 na variável $\mathbf{y}$, ou seja, se existem e são contínuas todas as derivadas parciais $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_j}$, $\mathbf{f}$ é localmente lipschitiziana na variável $\mathbf{y}$.

Teorema (Picard-Lindelöf): Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, localmente lipschitziana na variável $\mathbf{y}$ e $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \Omega$. Então, o problema de valor inicial para a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

tem solução única num intervalo $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, para algum $\varepsilon > 0$.
Nas mesmas condições, a solução pode ser prolongada de forma única a um intervalo máximo de definição $]T_0, T_1[$ tal que $(t, \mathbf{y}(t)) \to \partial\Omega$ quando $t \to T_0^+$ e $t \to T_1^-$.

Proposição (Comparação): Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ um conjunto aberto, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ funções contínuas, localmente lipschitzianas na variável y e $(t_0, y_0) \in \Omega$. Suponha-se ainda que

$$f(t, y) > g(t, y), \qquad (t, y) \in \Omega.$$

Então, designando por y e $\tilde{y}$ as duas soluções, únicas, dos problemas de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0,$$

e

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = g(t, \tilde{y}), \qquad \tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0 \leq y_0,$$

tem-se que $y(t) \geq \tilde{y}(t)$ para $t \geq t_0$ no maior intervalo de tempo de existência comum às duas soluções.